Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

Prof. Dr. J. Boedecker, Prof. Dr. W. Burgard, Prof. Dr. F. Hutter, Prof. Dr. B. Nebel,
Dr. rer. nat. M. Tangermann
M. Krawez, T. Schulte
Sommersemester 2019

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 5 — Lösungen

Aufgabe 5.1 (Bedingte Unabhängigkeit)

Sie erhalten einen Beutel mit n fairen Münzen, von denen $n-1$ normal sind, mit einem Kopf auf der einen und einer Zahl auf der anderen Seite, während eine Münze gefälscht ist und auf beiden Seiten Köpfe hat.

(a) Angenommen, Sie greifen in den Beutel, wählen zufällig und gleichverteilt eine Münze aus, werfen sie und erhalten Kopf. Wie hoch ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass Sie die gefälschte Münze gezogen haben?

(b) Angenommen, Sie werfen die Münze insgesamt k-mal, nachdem Sie sie gezogen haben, und erhalten immer Kopf. Wie hoch ist nun die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Sie die gefälschte Munze gezogen haben?

(c) Angenommen, Sie wollen entscheiden, ob die gewählte Münze die gefälschte ist, indem Sie sie k-mal werfen. Das Entscheidungsverfahren antwortet GEFÄLSCHT, falls alle k Würfe Köpfe zeigen, und NORMAL, sonst. Wie hoch ist die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit, dass dieses Verfahren einen Fehler macht?

Aufgabe 5.2 (Bayes-Regel)

In Freiburg sind 80% aller Autos rot. Sie sehen nachts ein Auto, dass ihnen *nicht* rot erscheint. Sie wissen, dass sie ein rotes Auto nur in 70% aller Fälle korrekt erkennen, gegeben das Auto ist rot. Allerdings erkennen sie ein nicht-rotes Auto in 90% der Fälle korrekt.

(a) Listen Sie sämtliche bedingten und nicht-bedingten Wahrscheinlichkeiten, die sich der Aufgabenstellung direkt entnehmen lassen. Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen der Aussage, dass ein Auto *rot ist* und der Aussage, dass Sie glauben ein *rotes Auto gesehen* zu haben.

(b) Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichtkeit das Auto wirklich rot ist, wenn Sie in Freiburg nachts ein Auto als rot wahrnehmen.

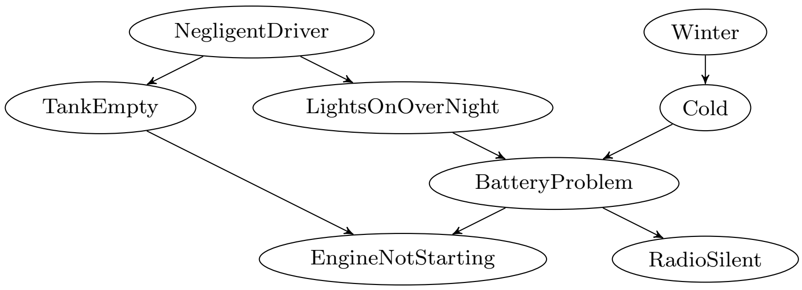
Lösung:

P(R): car is red
P(PR): car is perceived red
$P(R) = 0.8, P(\neg R) = 0.2$

$P(PR|R) = 0.7$
$P(\neg PR|\neg R) = 0.9$

$$P(R|PR) = \frac{P(PR|R) \cdot P(R)}{P(PR)}$$
$$= \frac{P(PR|R) \cdot P(R)}{P(PR|R) \cdot P(R) + P(PR|\neg R) \cdot P(\neg R)}$$
$$= \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.7 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2}$$
$$= \frac{0.56}{0.56 + 0.02} = \frac{0.56}{0.58} = \frac{28}{29}$$

Aufgabe 5.3 (Bayessche Netze)
Betrachten Sie das folgende Bayessche Netz:



(a) Bestimmen Sie, welche der folgenden bedingten Unabhängigkeiten aus der Struktur des Bayesschen Netzes folgen (dabei steht $Ind(U, V \mid W)$ dafür, dass U bedingt unabhängig von V gegeben W ist, und $Ind(U, V)$ für die unbedingte Unabhängigkeit von U und V).
   (i) $Ind(Cold, Winter)$
   (ii) $Ind(Winter, NegligentDriver)$
   (iii) $Ind(Winter, RadioSilent \mid BatteryProblem)$
   (iv) $Ind(Winter, EngineNotStarting \mid BatteryProblem)$
   (v) $Ind(Cold, NegligentDriver \mid RadioSilent)$

   Lösung:

   Wir wissen, dass (a) ein Knoten bedingt unabhängig ist von seinen Nicht-Nachfolgern gegeben seine Eltern, und dass (b) ein Knoten unabhängig von allen anderen Knoten ist gegeben seine *Markov blanket*, also seine Eltern, Kinder und die anderen Eltern seiner Kinder.
   (i) Gilt nicht. Intuitiv (und bei entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeitstabellen an den Knoten) sollte die Wahrscheinlichkeit für *Cold* steigen, wenn *Winter* wahr ist.
   (ii) Gilt, denn die Menge der Eltern von *Winter* ist leer, und *NegligentDriver* gehört zu den Nicht-Nachfolgern von *Winter*.
   (iii) Gilt, denn die *Markov Blanket* von *RadioSilent* besteht gerade aus *BatteryProblem*, und *Winter* liegt außerhalb davon.

(iv) Gilt nicht. Beispiel (unter Annahme von „intuitiven“ bedingten Wahrscheinlichkeitstabellen an den Knoten): Angenommen, *BatteryProblem* ist als wahr gegeben. Dann kann Information über *Winter* trotzdem unseren Belief über *EngineNotStarting* beeinflussen, denn wüssten wir etwa, dass *Winter* falsch ist, denn ist wahrscheinlich auch *Cold* falsch, aber weil *BatteryProblem* wahr ist, muss wahrscheinlich *LightsOnOverNight* und damit *NegligentDriver* wahr sein. Damit erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für *TankEmpty* und damit auch für *EngineNotStarting*.

(v) Gilt nicht. Argumentation ähnlich wie bei (iv), d.h. wenn etwa *RadioSilent* wahr ist, ist auch *BatteryProblem* wahrscheinlich. Ist nun aber etwa *Cold* falsch, dann „muss es an *LightsOnOverNight*“ liegen. Also wahrscheinlich *NegligentDriver*. *Hier noch ein wenig auf die spezielle Situation mit Head-to-Head-Meetings eingehen.*

(b) Berechnen Sie $P(\mathit{EngineNotStarting}|\mathit{NegligentDriver}, \neg \mathit{Cold})$. Dabei seien die relevanten Einträge in den bedingten Wahrscheinlichkeitstabellen wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
P(\mathit{LightsOnOverNight}|\mathit{NegligentDriver}) &= 0.3\\
P(\mathit{LightsOnOverNight}|\neg\mathit{NegligentDriver}) &= 0.02\\
P(\mathit{TankEmpty}|\mathit{NegligentDriver}) &= 0.1\\
P(\mathit{TankEmpty}|\neg\mathit{NegligentDriver}) &= 0.01\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\mathit{Cold}, \mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.9\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\mathit{Cold}, \neg\mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.2\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\neg\mathit{Cold}, \mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.8\\
P(\mathit{BatteryProblem}|\neg\mathit{Cold}, \neg\mathit{LightsOnOverNight}) &= 0.01\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\mathit{BatteryProblem}, \mathit{TankEmpty}) &= 0.9\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\mathit{BatteryProblem}, \neg\mathit{TankEmpty}) &= 0.7\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\neg\mathit{BatteryProblem}, \mathit{TankEmpty}) &= 0.8\\
P(\mathit{EngineNotStarting}|\neg\mathit{BatteryProblem}, \neg\mathit{TankEmpty}) &= 0.05
\end{aligned}
$$

(c) Listen Sie alle Knoten in der Markov-Blanket für den Knoten *LightsOnOverNight*.

Lösung:

Am einfachsten ist in diesem Fall, die Wahrscheinlichkeiten von oben nach unten auszurechnen. Es sind

$$
\begin{aligned}
P(L|N, \neg C) &= 0.3\\
P(T|N, \neg C) &= 0.1\\
P(B|N, \neg C) &= P(L|N, \neg C) \cdot P(B|L, \neg C) +\\
&\quad P(\neg L|N, \neg C) \cdot P(B|\neg L, \neg C)\\
&= 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.01 = 0.247
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
P(E|N,\neg C) &= P(B|N,\neg C)\cdot P(T|N,\neg C)\cdot P(E|B,T) + \\
&\quad P(B|N,\neg C)\cdot P(\neg T|N,\neg C)\cdot P(E|B,\neg T) + \\
&\quad P(\neg B|N,\neg C)\cdot P(T|N,\neg C)\cdot P(E|\neg B,T) + \\
&\quad P(\neg B|N,\neg C)\cdot P(\neg T|N,\neg C)\cdot P(E|\neg B,\neg T) \\
&= 0.247\cdot 0.1\cdot 0.9 + 0.247\cdot 0.9\cdot 0.7 + \\
&\quad 0.753\cdot 0.1\cdot 0.8 + 0.753\cdot 0.9\cdot 0.05 \\
&= 0.02223 + 0.15561 + 0.06024 + 0.033885 = 0.271965 \approx 27\%
\end{aligned}
$$