Grundlagen der Künstlichen Intelligenz

Prof. Dr. J. Boedecker, Prof. Dr. W. Burgard, Prof. Dr. F. Hutter, Prof. Dr. B. Nebel
M. Krawez, T. Schulte
Sommersemester 2018

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 5 — Lösungen

Aufgabe 5.1 (Klausel-Normalform)
Bringen Sie die folgenden PL1-Formeln in die Klausel-Normalform.

1. $\forall x\big[\forall z Q(x,z) \Rightarrow \neg\exists y\,(R(y) \wedge P(x,y))\,\big] \wedge \exists y \neg R(y)$
2. $\exists x\big(\forall y Q(x,y) \iff \exists z\big[Q(x,z) \vee P(z)\big]\big)$
3. $\forall x \neg\forall y\big[R(x,y) \Rightarrow \big(\neg P(x) \wedge \exists z Q(x,z,y) \wedge R(y,y)\big)\big]$

Lösung:

1.

i resolve implication
$\forall x\big[\neg\forall z Q(x,z) \vee \neg\exists y\,(R(y) \wedge P(x,y))\,\big] \wedge \exists y \neg R(y)$

ii pull negations inward
$\forall x\big[\exists z \neg Q(x,z) \vee \forall y\,(\neg R(y) \vee \neg P(x,y))\,\big] \wedge \exists y \neg R(y)$

iii make quantified variables unique
$\forall x\big[\exists z \neg Q(x,z) \vee \forall y\,(\neg R(y) \vee \neg P(x,y))\,\big] \wedge \exists y' \neg R(y')$

iv prenex normal form
$\forall x \exists z \forall y \exists y' \Big(\big[\neg Q(x,z) \vee (\neg R(y) \vee \neg P(x,y))\,\big] \wedge \neg R(y')\Big)$

v skolem normal form
$\forall x \forall y \Big(\big[\neg Q(x,f(x)) \vee (\neg R(y) \vee \neg P(x,y))\,\big] \wedge \neg R(g(x,y))\Big)$

vi clause normal form
$\{\{\neg Q(x,f(x)), \neg R(y), \neg P(x,y)\}, \{\neg R(g(x,y))\}\}$

2.

i resolve $\iff$
$\exists x\Big(\Big[\forall y Q(x,y) \Rightarrow \exists z\big[Q(x,z) \vee P(z)\big]\Big] \wedge \Big[\exists z\big[Q(x,z) \vee P(z)\big] \Rightarrow \forall y Q(x,y)\Big]\Big)$

ii resolve implications
$\exists x\Big(\Big[\neg\forall y Q(x,y) \vee \exists z\big[Q(x,z) \vee P(z)\big]\Big] \wedge \Big[\neg\exists z\big[Q(x,z) \vee P(z)\big] \vee \forall y Q(x,y)\Big]\Big)$

iii pull negations inward
$\exists x\Big(\Big[\exists y \neg Q(x,y) \vee \exists z\big[Q(x,z) \vee P(z)\big]\Big] \wedge \Big[\forall z\big[\neg Q(x,z) \wedge \neg P(z)\big] \vee \forall y Q(x,y)\Big]\Big)$

iv make quantified variables unique
$\exists x\Big(\Big[\exists y \neg Q(x,y) \vee \exists z\big[Q(x,z) \vee P(z)\big]\Big] \wedge \Big[\forall z'\big[\neg Q(x,z') \wedge \neg P(z')\big] \vee \forall y' Q(x,y')\Big]\Big)$

v prenex normal form
$\exists x \exists y \exists z \forall z' \forall y'\Big(\Big[\neg Q(x,y) \vee \big[Q(x,z) \vee P(z)\big]\Big] \wedge \Big[\big[\neg Q(x,z') \wedge \neg P(z')\big] \vee Q(x,y')\Big]\Big)$

vi skolem normal form
$\forall z' \forall y'\Big(\Big[\neg Q(a,b) \vee \big[Q(a,c) \vee P(c)\big]\Big] \wedge \Big[\big[\neg Q(a,z') \wedge \neg P(z')\big] \vee Q(a,y')\Big]\Big)$

vii clause normal form
$\{\{\neg Q(a,b), Q(a,c), P(c)\}, \{Q(a,y'), \neg Q(a,z')\}, \{Q(a,y'), \neg P(z')\}\}$

3.

i resolve implications
$\forall x \neg \forall y\big[\neg R(x,y) \vee \big(\neg P(x) \wedge \exists z Q(x,z,y) \wedge R(y,y)\big)\big]$

ii pull negations inward
$\forall x \exists y\big[R(x,y) \wedge \big(P(x) \vee \forall z \neg Q(x,z,y) \vee \neg R(y,y)\big)\big]$

iii prenex normal form
$\forall x \exists y \forall z\big[R(x,y) \wedge \big(P(x) \vee \neg Q(x,z,y) \vee \neg R(y,y)\big)\big]$

iv skolem normal form
$\forall x \forall z\big[R(x,f(x)) \wedge \big(P(x) \vee \neg Q(x,z,f(x)) \vee \neg R(f(x),f(x))\big)\big]$

v clause normal form
$\{\{R(x,f(x))\}, \{P(x), \neg Q(x,z,f(x)), \neg R(f(x),f(x))\}\}$

Aufgabe 5.2 (Unifikation)

Finden Sie (falls möglich) den kleinste gemeinsamen Unifikator mit dem Algorithmus aus der Vorlesung.

(a) $\{P(x,f(x),y), P(z,y,x)\}$

(b) $\{Q(x,g(y,x)), Q(\tilde{y},z), Q(g(\tilde{z},\tilde{x}),z)\}$

(c) $\{R(y,f(x,y),g(z)), R(g(x),\tilde{z},y)\}$

Lösung:

1.

i $\{P(x,f(x),y), P(z,y,x)\} \quad s=\{\}$

ii $\{P(z,f(z),y), P(z,y,z)\} \quad s=\{\frac{x}{z}\}$

iii $\{P(z, f(z), f(z)), P(z, f(z), z)\} \quad s = \{\frac{x}{z}, \frac{y}{f(z)}\}$

iv disagreement set is $\{f(z), z\}$, return error

2.

i $\{Q(x, g(y, x)), Q(\tilde{y}, z), Q(g(\tilde{z}, \tilde{x}), z)\} \quad s = \{\}$

ii $\{Q(\tilde{y}, g(y, \tilde{y}), Q(\tilde{y}, z), Q(g(\tilde{z}, \tilde{x}), z)\} \quad s = \{\frac{x}{\tilde{y}}\}$

iii $\{Q(g(\tilde{z}, \tilde{x}), g(y, g(\tilde{z}, \tilde{x}))), Q(g(\tilde{z}, \tilde{x}), z)\} \quad s = \{\frac{x}{g(\tilde{z},\tilde{x})}, \frac{\tilde{y}}{g(\tilde{z},\tilde{x})}\}$

iv $\{Q(g(\tilde{z}, \tilde{x}), g(y, g(\tilde{z}, \tilde{x})))\} \quad s = \{\frac{x}{g(\tilde{z},\tilde{x})}, \frac{\tilde{y}}{g(\tilde{z},\tilde{x})}, \frac{z}{g(y,g(\tilde{z},\tilde{x}))}\}$

v return $s = \{\frac{x}{g(\tilde{z},\tilde{x})}, \frac{\tilde{y}}{g(\tilde{z},\tilde{x})}, \frac{z}{g(y,g(\tilde{z},\tilde{x}))}\}$

3.

i $\{R(y, f(x, y), g(z)), R(g(x), \tilde{z}, y)\} \quad s = \{\}$

ii $\{R(g(x), f(x, g(x)), g(z)), R(g(x), \tilde{z}, g(x))\} \quad s = \{\frac{y}{g(x)}\}$

iii $\{R(g(x), f(x, g(x)), g(z)), R(g(x), f(x, g(x)), g(x))\} \quad s = \{\frac{y}{g(x)}, \frac{\tilde{z}}{f(x,g(x))}\}$

iv $\{R(g(x), f(x, g(x)), g(x))\} \quad s = \{\frac{y}{g(x)}, \frac{\tilde{z}}{f(x,g(x))}, \frac{z}{x}\}$

v return $s = \{\frac{y}{g(x)}, \frac{\tilde{z}}{f(x,g(x))}, \frac{z}{x}\}$

Aufgabe 5.3 (Resolution)
Wenden Sie das Resolutionskalkül an um zu zeigen dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Substitution Sie nutzen.

Klauselmenge wie im Original des Übungsblattes angegeben (unlösbar):

$$\cancel{\Big\{Q(x, y), P\big(g(z, z)\big)\Big\}} \tag{1}$$

$$\cancel{\Big\{\neg P\big(g(x', a)\big), Q\big(y', g(z', y')\big)\Big\}} \tag{2}$$

$$\cancel{\Big\{\neg P(y''), \neg Q\big(f(x''), y''\big), \neg Q(a, z'')\Big\}} \tag{3}$$

Neue (lösbare) Version:

$$\Big\{Q(x, y), P\big(g(z, z)\big)\Big\} \tag{1}$$

$$\Big\{\neg P\big(g(x', a)\big), Q\big(y', g(z', y')\big)\Big\} \tag{2}$$

$$\Big\{\neg Q\big(f(x''), y''\big), \neg Q(a, z'')\Big\} \tag{3}$$

Lösung:

$$(1)+(2) \quad \text{with} \quad s=\left\{\frac{z}{a},\frac{x'}{a}\right\}: \quad \{Q(x,y),Q\big(y',g(z',y')\big)\} \tag{4}$$

$$(4) \quad \text{with} \quad s=\left\{\frac{x}{y'},\frac{y}{g(z',y')}\right\}: \quad \{Q\big(y',g(z',y')\big)\} \tag{5}$$

$$(3)+(5) \quad \text{with} \quad s=\left\{\frac{y'}{f(x'')},\frac{y''}{g(z',f(x''))}\right\}: \quad \{\neg Q(a,z'')\} \tag{6}$$

$$(5)+(6) \quad \text{with} \quad s=\left\{\frac{y'}{a},\frac{z''}{g(z',a)}\right\}: \quad \perp \tag{7}$$

Aufgabe 5.4 (Beweise mit Resolution)
Betrachten Sie die folgenden Aussagen über die natürlichen Zahlen:

i Wenn x durch y teilbar ist dann ist x größer als oder gleich y.

ii Wenn x größer als oder gleich y und y größer als oder gleich x ist dann ist x gleich y.

iii Wenn x durch y teilbar ist und y durch x teilbar ist dann ist x gleich y.

(a) Formalisieren Sie die Aussagen (i)-(iii) mit Prädikatenlogik.

(b) Verwenden Sie Resolution, um zu zeigen, ob $(i) \land (ii) \models (iii)$ gilt oder nicht.

Lösung:
(a)
One possible formalization is

i $\forall x \forall y\, (D(x,y) \Rightarrow x \geq y)$

ii $\forall x \forall y\, (x \geq y \land y \geq x \Rightarrow x = y)$

iii $\forall x \forall y\, (D(x,y) \land D(y,x) \Rightarrow x = y)$

where $D(x,y)$ means x is divisible by y.
(b)
To show that $(i) \land (ii) \models (iii)$ we have to show that $(i) \land (ii) \land \neg(iii) \models \square$. Important: Showing that $(i) \land (ii) \models (iii)$ is possible using resolution, but does not fully answer the question as we asked to show if this holds *or not*. Resolution is only refutation complete! First, we bring the resulting formula into CNF:

after resolving implications and pushing negation inward

$\forall x \forall y\, (\neg D(x,y) \lor x \geq y) \land$
$\forall x \forall y\, (\neg x \geq y \lor \neg y \geq x \lor x = y) \land$
$\exists x \exists y\, (D(x,y) \land D(y,x) \land \neg x = y)$

after variable renaming and skolemizing

(here we can use commutativity and put the existentially quantified sub-formula to the front in order to avoid long skolem functions)

$\forall x \forall y \forall \tilde{x} \forall \tilde{y}\, (\neg D(x,y) \vee x \geq y) \wedge$
$(\neg \tilde{x} \geq \tilde{y} \vee \neg \tilde{y} \geq \tilde{x} \vee \tilde{x} = \tilde{y}) \wedge$
$(D(a,b) \wedge D(b,a) \wedge \neg a = b)$

we obtain the following clauses:

1 $\{\neg D(x,y), x \geq y\}$

2 $\{\neg \tilde{x} \geq \tilde{y}, \neg \tilde{y} \geq \tilde{x}, \tilde{x} = \tilde{y}\}$

3 $\{D(a,b)\}$

4 $\{D(b,a)\}$

5 $\{\neg a = b\}$

now we use resolution to derive the empty close

6 $\{a \geq b\}$ from 1. and 3. with $\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\}$

7 $\{b \geq a\}$ from 1. and 4. with $\left\{\frac{x}{b}, \frac{y}{a}\right\}$

8 $\{\neg b \geq a, a = b\}$ from 2. and 6. with $\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right\}$

9 $\{a = b\}$ from 8. and 7.

10 $\{\}$ from 5. and 9.

Aufgabe 5.5 (Handlungsplanung)
Betrachten Sie folgenden STRIPS-Task $\Pi = \langle \mathcal{S}, O, I, G \rangle$:

- $\mathcal{S}$: {X, Y, Z, G}
- $O : \{A, B, C, D, E, F\}$ wobei

$$\begin{array}{ll}
A: \; \mathit{pre}(A) = \{X\}, & \mathit{eff}(A) = \{Y, Z\} \\
B: \; \mathit{pre}(B) = \{X\}, & \mathit{eff}(B) = \{\neg X, Z\} \\
C: \; \mathit{pre}(C) = \{\neg Y\}, & \mathit{eff}(C) = \{Z\} \\
D: \; \mathit{pre}(D) = \{\neg Z\}, & \mathit{eff}(D) = \{Y\} \\
E: \; \mathit{pre}(E) = \{\neg X, Y\}, & \mathit{eff}(E) = \{\neg Y, G\} \\
F: \; \mathit{pre}(F) = \{Z\}, & \mathit{eff}(F) = \{\neg Z, G\}
\end{array}$$

- I: {X, Y}
- G: {G}

(a) Geben Sie für jeden Operator aus O an, ob dieser in I anwendbar ist, oder nicht. Für jeden anwendbaren Operator, geben Sie außerdem den resultiernden Zustand an, nachdem der Operator in I angewandt wurde.

Operator	anwendbar?	resultierender Zustand
A		
B		
C		
D		
E		
F		

Lösung:

Operator	Applicable?	Resulting State
A	Yes	$\{X, Y, Z\}$
B	Yes	$\{Y, Z\}$
C	No	-
D	Yes	$\{X, Y\}$
E	No	-
F	No	-

(b) Geben Sie einen anwendbaren Plan π an, der von I zu G führt.

Lösung:

$\pi = \langle B, E \rangle$, $\langle A, F \rangle$, $\langle B, F \rangle$, $\ldots$