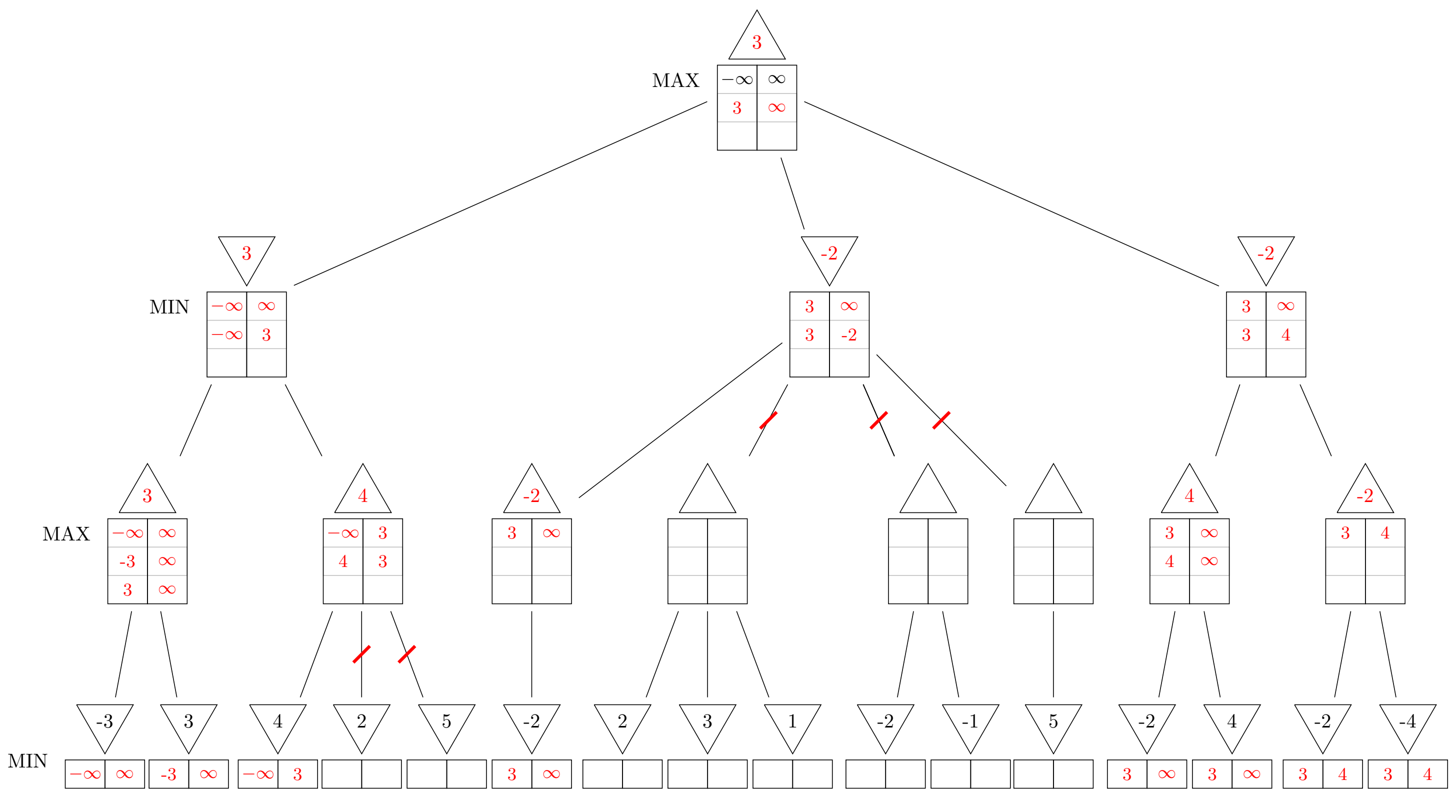
Übungsblatt 3 — Lösungen

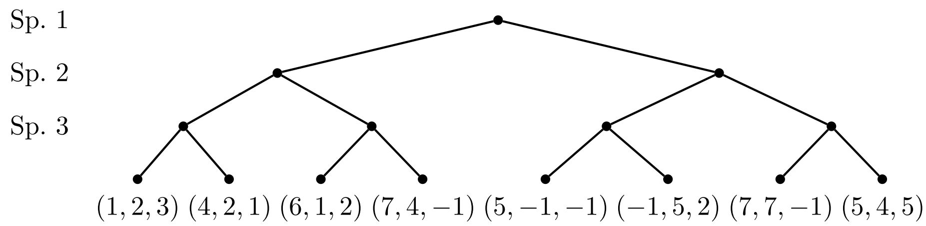
Aufgabe 3.1 (Brettspiele)

(a) Betrachten Sie folgenden Spielbaum für ein Zwei-Personen-Spiel.
Simulieren Sie das Verhalten des Minimax Algorithmus mit α-β-Pruning (expandieren Sie Kindknoten dabei von links nach rechts). Tragen Sie die Werte der berechneten Knoten in die Dreiecke und die α-β-Zwischenwerte in die zugehörigen Tabellen ein.



(b) Betrachten Sie nun das Problem, den Spielbaum eines Drei-Personen-Spiels zu evaluieren, das nicht notwendigerweise die Nullsummenbedingung erfüllt. Sie dürfen annehmen, dass keine Allianzen zwischen Spielern erlaubt sind. Die Spieler heißen 1, 2 und 3. Im Gegensatz zu Zwei-Personen-Nullsummenspielen liefert die Bewertungsfunktion nun Tripel (x_1, x_2, x_3) zurück, wobei x_i der Wert für Spieler i ist.

Vervollständigen Sie den Spielbaum, indem Sie alle inneren Knoten und den Wurzelknoten mit den entsprechenden Wert-Tripeln annotieren.



Lösung:

- Ebene Sp 3: 123, 612, -152, 545
- Ebene Sp 2: 123, -152
- Ebene Sp 1: 123

(c) Angenommen, das Wert-Tripel $(5, 4, 5)$ ganz rechts würde durch $(5, 4, -1)$ ersetzt. Welche Schwierigkeit tritt nun bei der Auswertung des Spielbaums auf? Schlagen Sie vor, wie die Auswertung eines Knotens gegeben die Auswertungen seiner Nachfolger modifiziert werden kann, damit man am Wurzelknoten ein „robustes“ Ergebnis erhält.

Lösung:

Problem: Entscheidung für Spieler 3 nicht mehr eindeutig.

Pessimistisch / Optimistisch / Sets

Aufgabe 3.2 (Erfüllbarkeit, Modelle)

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie gültig, unerfüllbar oder keines von beidem ist.

(1) $\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Rauch}$

(2) $\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Feuer}$

(3) $(\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Feuer}) \Rightarrow (\neg \mathit{Feuer} \Rightarrow \neg \mathit{Rauch})$

(4) $(\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Feuer}) \Rightarrow ((\mathit{Rauch} \wedge \mathit{Hitze}) \Rightarrow \mathit{Feuer})$

(5) $\mathit{Frühling} \Leftrightarrow \mathit{SchönesWetter}$

Lösung:

In allen Fällen kann man Wahrheitstabellen aufstellen, um Gültigkeit zu zeigen bzw. Erfüllbarkeit zu widerlegen. Um Gültigkeit zu widerlegen bzw. Erfüllbarkeit zu beweisen, reicht die Angabe von einzelnen nicht-erfüllenden bzw. erfüllenden Belegungen.

(1) $\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Rauch}$: Gültig (Wahrheitstabelle) und damit auch erfüllbar.

(2) $\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Feuer}$: Erfüllbar ($\{R \mapsto 1, F \mapsto 1\}$), aber nicht gültig ($\{R \mapsto 1, F \mapsto 0\}$).

(3) $(\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Feuer}) \Rightarrow (\neg \mathit{Feuer} \Rightarrow \neg \mathit{Rauch})$: Gültig (Wahrheitstabelle) und damit auch erfüllbar.

(4) $(\mathit{Rauch} \Rightarrow \mathit{Feuer}) \Rightarrow ((\mathit{Rauch} \wedge \mathit{Hitze}) \Rightarrow \mathit{Feuer})$: Gültig (Wahrheitstabelle) und damit auch erfüllbar.

(5) $\mathit{Frühling} \Leftrightarrow \mathit{SchönesWetter}$: Erfüllbar ($\{B \mapsto 1, D \mapsto 1\}$), aber nicht gültig ($\{B \mapsto 0, D \mapsto 1\}$).

(b) Gehen Sie von einem Vokabular mit nur vier atomaren Aussagen A, B, C und D aus. Wie viele Modelle gibt es für die folgenden Formeln? Begründen Sie.

(1) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$

Lösung:

Notation: $abcd$ mit $a, b, c, d \in \{0, 1, X\}$ als Kurzform von $\{A \mapsto a, B \mapsto b, C \mapsto c, D \mapsto d\}$. X als Schreibweise für: sowohl 0 als auch 1 möglich.

Modelle für $A \wedge B$ sind alle Belegungen $11XX$ (also vier Möglichkeiten: 1100, 1101, 1110, 1111), Modelle für $B \wedge C$ sind alle Belegungen $X11X$ (vier Möglichkeiten). Eine Belegung ist Modell von $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$ genau dann, wenn sie Modell von $A \wedge B$ oder von $B \wedge C$ ist. Insgesamt also sechs Modelle, da wir 1110 und 1111 nicht doppelt zählen dürfen.

(2) $A \vee B$

Lösung:

Die einzigen Belegungen der vier Variablen, die *keine* Modelle von $A \vee B$ sind, sind die Modelle von $\neg A \wedge \neg B$, also Belegungen der Form $00XX$, wovon es vier gibt. Die restlichen 12 der 16 Belegungen sind Modelle von $A \vee B$.

(3) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)$

Lösung:

Modelle haben die Form $000X$ oder $111X$, also insgesamt vier Modelle.

Aufgabe 3.3 (KNF-Transformation, Resolutionsmethode)
Es gelten die folgenden Umformungsregeln, nach denen man aussagenlogische Formeln in äquivalente Formeln überführen kann. Dabei sind φ, ψ und χ beliebige aussagenlogische Formeln:

$$
\begin{aligned}
\neg\neg\varphi &\equiv \varphi && (1)\\
\neg(\varphi \vee \psi) &\equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi && (2)\\
\varphi \vee (\psi \wedge \chi) &\equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) && (3)\\
\neg(\varphi \wedge \psi) &\equiv \neg\varphi \vee \neg\psi && (4)\\
\varphi \wedge (\psi \vee \chi) &\equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) && (5)
\end{aligned}
$$

Außerdem sind die $\vee$- und $\wedge$-Operationen assoziativ und kommutativ.

Betrachten Sie die Formel $((C \wedge \neg B) \leftrightarrow A) \wedge (\neg C \to A)$.

(a) Wandeln Sie die Formel mithilfe der KNF-Transformationsregeln in eine Klauselmenge K um. Schreiben Sie die einzelnen Schritte auf.

Lösung:

Umformung in Konjunktive Normalform:

$$
\begin{aligned}
((C \wedge \neg B) \leftrightarrow A) \wedge (\neg C \to A) &\equiv ((C \wedge \neg B) \to A) \wedge (A \to (C \wedge \neg B)) \wedge (\neg C \to A)\\
&\equiv (\neg(C \wedge \neg B) \vee A) \wedge (\neg A \vee (C \wedge \neg B)) \wedge (C \vee A)\\
&\equiv (\neg C \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee A)
\end{aligned}
$$

In Klauselform haben wir also

$$K = \{\{A, B, \neg C\}, \{\neg A, C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{A, C\}\}.$$

(b) Zeigen Sie anschließend mittels der Resolutionsmethode, ob $K \models (\neg B \to (A \wedge C))$ gilt.

Lösung:

Um zu zeigen, dass $K \models \varphi$, genügt es zu zeigen, dass $K \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$. Wir müssen also die Klauseln, die $\neg(\neg B \to (A \wedge C))$ entsprechen, zu K hinzufügen und einen Widerspruch ableiten. Transformation von $\neg(\neg B \to (A \wedge C))$ in Klauselform:

$$
\begin{aligned}
\neg(\neg B \to (A \wedge C)) &\equiv \neg B \wedge \neg(A \wedge C)\\
&\equiv \neg B \wedge (\neg A \vee \neg C)
\end{aligned}
$$

d. h. $\{\{\neg B\}, \{\neg A, \neg C\}\}$.

Resolution (eine von vielen Möglichkeiten, bevorzugte Schreibweise):

$$\Big\{\neg A, \neg B\Big\} \tag{1}$$
$$\Big\{A, B, \neg C\Big\} \tag{2}$$
$$\Big\{\neg B\Big\} \tag{3}$$
$$\Big\{A, C\Big\} \tag{4}$$
$$\Big\{\neg A, C\Big\} \tag{5}$$
$$\Big\{\neg A, \neg C\Big\} \tag{6}$$
$$(2) + (3): \quad \Big\{A, \neg C\Big\} \tag{7}$$
$$(5) + (6): \quad \Big\{\neg A\Big\} \tag{8}$$
$$(4) + (7): \quad \Big\{A\Big\} \tag{9}$$
$$(8) + (9): \quad \emptyset \tag{10}$$

Alternative Schreibweise:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg A, \neg B\} & \{A, B, \neg C\} \arrow[d] & \{\neg B\} \arrow[dl] & \{A, C\} \arrow[ddl] & \{\neg A, C\} \arrow[d] & \{\neg A, \neg C\} \arrow[dl] \\
& \{A, \neg C\} \arrow[dr] & & & \{\neg A\} \arrow[ddl] & \\
& & \{A\} \arrow[dr] & & & \\
& & & \emptyset & &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3.4 (Modellierung, Beweise)
Betrachten Sie die folgende Wissensbasis:

Wenn das Einhorn ein Fabelwesen ist, dann ist es unsterblich, aber wenn es kein Fabelwesen ist, dann ist es ein sterbliches Säugetier. Wenn das Einhorn unsterblich oder ein Säugetier ist, dann ist es gehörnt. Das Einhorn ist märchenhaft, wenn es gehörnt ist.

Können Sie anhand dieser Wissensbasis beweisen, dass das Einhorn (a) ein Fabelwesen, (b) märchenhaft oder (c) gehörnt ist? Formalisieren Sie zunächst die Wissensbasis mithilfe der Aussagenlogik. Falls eine Aussage allgemeingültig oder unerfüllbar ist, nutzen Sie Resolution für den Beweis. Andernfalls, geben Sie jeweils eine erfüllende und eine nicht erfüllende Interpretation an.

Lösung:

Die Aussagen können folgendermaßen mithilfe der atomaren Aussagen *mythical* (Fabelwesen), *mortal* (sterblich), *mammal* (Säugetier), *magical* (Märchenwesen) und *horned* (gehörnt) formalisiert werden:

$$\begin{aligned} \mathit{mythical} &\rightarrow \neg \mathit{mortal} && \text{(i)} \\ \neg \mathit{mythical} &\rightarrow \mathit{mortal} \wedge \mathit{mammal} && \text{(ii)} \\ \neg \mathit{mortal} \vee \mathit{mammal} &\rightarrow \mathit{horned} && \text{(iii)} \\ \mathit{horned} &\rightarrow \mathit{magical} && \text{(iv)} \end{aligned}$$

Sei $KB = (i) \wedge (ii) \wedge (iii) \wedge (iv)$ die Menge dieser vier Aussagen, in KNF:

$$\Big\{\neg \mathit{mythical}, \neg \mathit{mortal}\Big\} \tag{1}$$

$$\Big\{\mathit{mythical}, \mathit{mortal}\Big\} \tag{2}$$

$$\Big\{\mathit{mythical}, \mathit{mammal}\Big\} \tag{3}$$

$$\Big\{\mathit{mortal}, \mathit{horned}\Big\} \tag{4}$$

$$\Big\{\neg \mathit{mammal}, \mathit{horned}\Big\} \tag{5}$$

$$\Big\{\neg \mathit{horned}, \mathit{magical}\Big\} \tag{6}$$

Darüber, ob das Einhorn ein Fabelwesen ist, kann man nichts aussagen, denn es gibt Modelle I_{mythical} und $I_{\neg \mathit{mythical}}$ von KB mit $I_{\mathit{mythical}} \models \mathit{mythical}$ und $I_{\neg \mathit{mythical}} \models \neg \mathit{mythical}$. Konkret: $I_{\mathit{mythical}} = \{\mathit{mythical} \mapsto 1, \mathit{mortal} \mapsto 0, \mathit{mammal} \mapsto 0, \mathit{magical} \mapsto 1, \mathit{horned} \mapsto 1\}$ und $I_{\neg \mathit{mythical}} = \{\mathit{mythical} \mapsto 0, \mathit{mortal} \mapsto 1, \mathit{mammal} \mapsto 1, \mathit{magical} \mapsto 1, \mathit{horned} \mapsto 1\}$. Also $KB \not\models \neg \mathit{mythical}$ und $KB \not\models \mathit{mythical}$.
Es gilt $KB \models \mathit{horned}$ denn $KB \cup \{\neg \mathit{horned}\}$ ist unerfüllbar. Beweis:
Sei

$$\Big\{\neg \mathit{horned}\Big\} \tag{7a}$$

dann

$$\begin{aligned} (5) + (7a) &: \quad \Big\{\neg \mathit{mammal}\Big\} && \text{(8a)} \\ (4) + (7a) &: \quad \Big\{\mathit{mortal}\Big\} && \text{(9a)} \\ (3) + (8a) &: \quad \Big\{\mathit{mythical}\Big\} && \text{(10a)} \\ (1) + (10a) &: \quad \Big\{\neg \mathit{mortal}\Big\} && \text{(11a)} \\ (11a) + (9a) &: \quad \emptyset \end{aligned}$$

Es gilt $KB \models \mathit{magical}$ denn $KB \cup \{\neg \mathit{magical}\}$ ist unerfüllbar. Beweis:
Sei

$$\Big\{\neg \mathit{magical}\Big\} \tag{7b}$$

dann

$$(6) + (7b): \quad \left\{\neg horned\right\} \tag{8b}$$

$$(5) + (8b): \quad \left\{\neg mammal\right\} \tag{9b}$$

$$(4) + (8b): \quad \left\{mortal\right\} \tag{10b}$$

$$(3) + (9b): \quad \left\{mythical\right\} \tag{11b}$$

$$(1) + (11b): \quad \left\{\neg mortal\right\} \tag{12b}$$

$$(12b) + (10b): \quad \emptyset$$