

Einführung in die Informatik

Hashtables

Hashtabellen

Wolfram Burgard
Cyrill Stachniss

Einleitung

- Wir haben bisher einige der typischen Datenstrukturen zum Speichern von Informationen kennen gelernt
 - Arrays & Vectors
 - Listen
 - Bäume
 - Mengen
- Jede der vorgestellten Datenstrukturen hat Vor- und Nachteile
- Die Applikation bestimmt, welche Technik eingesetzt wird
- In dieser Vorlesung werden wir uns mit so genannten Hashtables (Hashtabellen) beschäftigen, die Vorteile einzelner Verfahren kombinieren

Hashtabellen

- Hashtables stellen effiziente Implementierungen von Mengen dar
- Wichtige Operationen sind
 - **Einfügen (insert)**
 - **Löschen (delete)**
 - **Suchen (search/contains)**
- Ziel der Hashtabellen ist es, diese drei Operation in (durchschnittlich) konstanter Zeit zu realisieren

Idee der Hashtabellen

- Speichert man Elemente in einem Vector so muss man i.A. alle Positionen durchsuchen, um das geeignete Element zu finden
- Wenn man anhand des Elementes selbst auf die Position, an der das Element gespeichert werden soll, schließen kann, lässt sich das Verfahren optimieren
- Effizient wäre dies umzusetzen, wenn sich jedes Objekt eindeutig einem Index in einem Array zuordnen lassen würde
- Einfügen, löschen und suchen: Man muss nur an der entsprechenden Stelle nachsehen und das Element dort einfügen, löschen, oder zurückliefern (Suche)

Datensatz und Schlüssel

- Im Folgenden betrachten wir nicht mehr nur Datensätze (Einfache Referenz auf ein Objekt) sondern betrachten zusätzlich einen Schlüssel
- **Datensatz = <Schlüssel, Informationsteil>**
- Der Schlüssel realisiert eine **eindeutige Identifikation** des Datensatzes

Beispiele für solche Datensätze

- Bank:
 - Schlüssel: Kontonummer
 - Informationsteil: Name, Adresse
- Telefonbuch:
 - Schlüssel: Nachname, Vorname
 - Informationsteil: Telefonnummer

Hashfunktion (1)

- Der Schlüssel liefert die Information, **wo** der Datensatz gespeichert werden soll
- Der Programmierer muss festlegen, welcher Teil des Datensatzes als Schlüssel dient
- Problem: der Programmierer soll sich keine Gedanken über die interne Struktur der Hashtabelle machen müssen
- Die Lösung liefert eine so genannte **Hashfunktion** h

$$h : D \mapsto \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

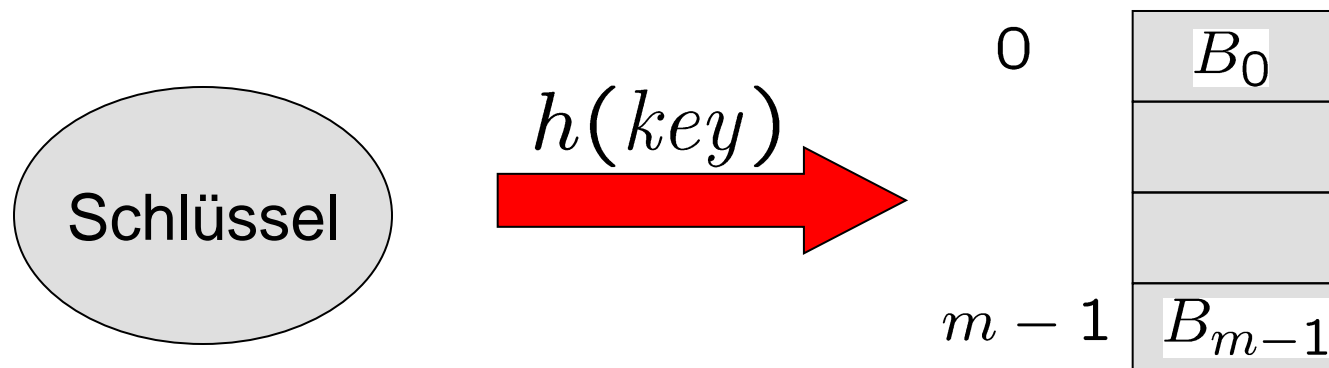
Wertebereich
des Schlüssels

Speicherplätze

Hashfunktion (2)

- Wir haben eine **Menge von m Behältern** B_0, \dots, B_{m-1}
- Die Behälter haben die **Adressen** $0, \dots, m - 1$
- Diese Adressen nennt man auch **Hashadressen**
- D sei der Wertebereich des Schlüssels
- h liefert eine **Abbildung von Schlüsseln auf Hashadressen**

$$h : D \mapsto \{0, 1, \dots, m - 1\}$$



Beispiel für eine Hashfunktion

- Wir möchten eine Menge von Bankkunden in einer Hashtabelle speichern
- Schlüssel: Kontonummer (int)
- Informationsteil: Name, Adresse, ...
- Uns stehen 1000 Speicherplätze zur Verfügung
- Die Hashfunktion muss also die Kontonummer auf die Zahlen 0, ..., 999 abbilden (1000 Speicherplätze)

$$h(kto) = kto \bmod m$$

- Empfehlung: m sollte eine Primzahl sein
- **Problem: Es gibt mehr Kontonummern als Speicherplätze**

Gute Hashfunktionen

- Es sollen **möglichst wenige Objekte auf eine Adresse** abgebildet werden
- Werden zwei unterschiedliche Objekte auf eine Hashadresse abgebildet, so spricht man von einer **Kollision**
- Sei M eine Menge mit n Elementen. Eine Hashfunktion heißt **perfekt für M** wenn es keine Kollision gibt ($n \leq m$)
- Gleichzeitig sollte eine gute Hashfunktion effizient berechenbar sein
- Gute Hashfunktionen für verschiedene Schlüssel zu entwerfen ist eine nicht triviale Aufgabe

Hashfunktionen in Java

- Java stellt schon in der Klasse `Object` eine geeignete Hashfunktion bereit
- Die Methode **`hashCode()`** liefert eine `int` Zahl für ein beliebiges `Object` zurück

```
int hashCode() {...}
```

- Um aus dem `hashCode` eine Hashadresse zu machen, muss man diesen auf **Zahlen zwischen 0 und $m-1$ beschränken**

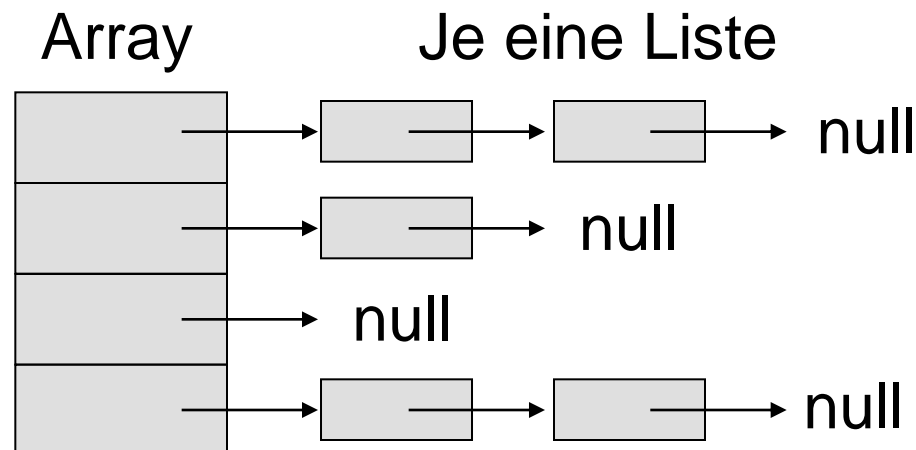
$$h(obj) = obj.hashCode() \bmod m$$

Skizze für Algorithmen

- Einfügen eines Datensatzes mit Schlüssel k :
 1. $\text{addr} = h(k)$
 2. Füge den Datensatz in Behälter B_{addr} ein
- Löschen eines Datensatzes mit Schlüssel k :
 1. $\text{addr} = h(k)$
 2. Lösche den Datensatz mit Schlüssel k aus dem Behälter B_{addr}
- Suche nach dem Datensatzes mit Schlüssel k :
 1. $\text{addr} = h(k)$
 2. Suche nach dem Datensatz mit Schlüssel k im Behälter B_{addr}

Wie verwaltet man die Behälter?

- Wir müssen eine feste Anzahl von Behältern speichern
- Wir müssen die Behälter **effizient über die Hashadresse (einen Index) ansprechen können**
- In jedem Behälter müssen ggf. mehrere Objekte gespeichert werden (die Anzahl ist unbekannt)
- Wir haben Datenstrukturen kennen gelernt, die dies erlauben
- Ein Array für die Behälter, jeder Behälter ist eine Liste



Realisierung der Hashtabellen-Elemente

```
public class HashtableElement {
    HashtableElement(Object key, Object info) {
        this.key = key;
        this.info = info;
    }

    void setInfo(Object info) {this.info = info;}
    Object getKey() {return this.key;}
    Object getInfo() {return this.info;}

    protected Object key;
    protected Object info;
}
```

Realisierung einer Einfachen Hashtabelle

```
class SimpleHashtable {
    SimpleHashtable(int size) {
        this.data = new HashtableElement[size];
        for (int i=0; i<size; i++)
            this.data[i] = new SingleLinkedList();
    }

    void insert(HashtableElement ds) {...}

    void delete(Object key) {...}

    HashtableElement search(Object key) {...}

    HashtableElement[] data;
}
```

Insert, Delete, and Search

```
void insert(HashtabelElement ds) {  
    int addr = ds.getKey().hashCode() % data.length;  
    data[addr].insert(ds);  
}
```

```
void delete(Object key) {  
    int addr = key.hashCode() % data.length;  
    data[addr].delete(key);  
}
```

```
HashtabelElement search(Object key) {  
    int addr = key.hashCode() % data.length;  
    return data[addr].search(key);  
}
```

Belegungsfaktor

- Die bisherige Implementierung erlaubt eine einfache und effiziente Realisierung
- Es wird allerdings angenommen, dass die Anzahl der zu speichernden Objekte zuvor abgeschätzt werden kann
- Werden zu viele Objekte eingefügt, so müssen bei jeder Operation ggf. lange Listen durchsucht werden
- Dies würde die Laufzeit negativ beeinflussen
- Belegungsfaktor $\alpha = \frac{n}{m}$
- n = Anzahl der Elemente in der Hashtable
- m = Anzahl der Behälter (Größe des Arrays `this.data`)

Gefahr von Kollisionen (1)

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit einer Kollision (bei Verwendung einer guten Hashfunktion)?
- Annahme: $k \in D, j \in \{0, \dots, m - 1\} : P(h(k) = j) = \frac{1}{m}$
- Wahrscheinlichkeit einer Kollision für das Aufbauen einer Hashtabelle mit n Elemente ist damit:
$$P(\text{Kollision}) = 1 - P(\text{keine Kollision}) = 1 - P(1) \cdot P(2) \cdot \dots \cdot P(n)$$
wobei $P(i)$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Element i auf einen freien Behälter abgebildet wird

Gefahr von Kollisionen (2)

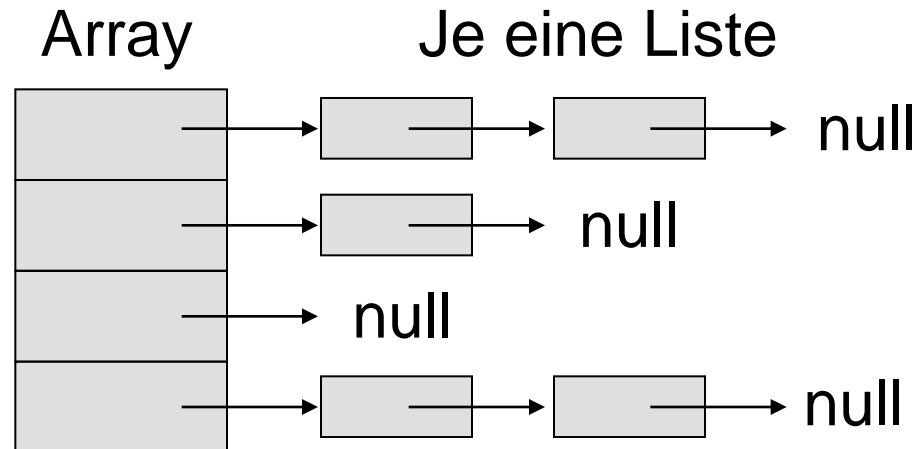
- Es gilt für $i < m$:
$$P(1) = 1$$
$$P(2) = \frac{(m-1)}{m}$$
$$\vdots$$
$$P(i) = \frac{(m-i+1)}{m}$$
- Somit erhalten wir
$$P(\text{Kollision}) = 1 - \prod_{i=1}^n P(i)$$
$$= 1 - \frac{\prod_{i=1}^n (m - i + 1)}{m^n}$$
- Beispiel (Geburtstagsparadoxon):
 - $m = 365$
 - $n = 23$: $P(\text{Kollision}) = 50\%$
 - $n = 50$: $P(\text{Kollision}) = 97\%$
- Eine Hashtabelle muss effizient mit Kollisionen umgehen können

Verschiedene Arten von Hashtabellen

- Man unterscheidet Hashverfahren anhand Ihrer Behandlung von Kollisionen und wie die Behälter verwaltet werden
- Wir betrachten hier in der Vorlesung:
- **Hashverfahren mit Verkettung**
- **Offene (geschlossene) Hashverfahren**
 - Lineares Sondieren
 - Quadratisches Sondieren
 - Double Hashing
- **Lineares Hashing**

Hashverfahren mit Verkettung

- Hashverfahren mit Verkettung können **in den einzelnen Behältern mehrere Elemente** speichern
- Die zuvor vorgestellte Hashtabelle ist somit ein Vertreter der Hashverfahren mit Verkettung



Analyse: Hashverfahren mit Verkettung (1)

- **Im schlimmsten Fall** werden alle Elemente einem Behälter zugeordnet. In diesem Fall degeneriert die Hashtabelle zu einer Liste
- **Im Durchschnitt** ergibt sich für die **erfolglose Suche**:
 - Die Liste der entsprechenden Hashadresse muss komplett durchsucht werden
 - Bei einer Gleichverteilung der Schlüssel auf Adressen ergibt sich für die Anzahl der Zugriffe:

$$\# \text{Zugriffe} = \frac{n}{m} = \alpha$$

- Dies entspricht genau dem Belegungsfaktor

Analyse: Hashverfahren mit Verkettung (2)

- **Im Durchschnitt** ergibt sich für die **erfolgreiche Suche**:
- Betrachten wir den j -ten Datensatz zum Zeitpunkt des Einfügens.
- Zu diesem Zeitpunkt befanden sich in jeder Liste im Schnitt $(j-1)/m$ Elemente
- Bei einer späteren Suche ergeben sich so $1+(j-1)/m$ Elemente
- Durch Summation über j und anschließendem teilen durch n ergibt sich

$$\# \text{Zugriffe} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{j-1}{m} \right)$$

Analyse: Hashverfahren mit Verkettung (3)

$$\begin{aligned}\# \text{Zugriffe} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 + \frac{j-1}{m} \right) \\ &= 1 + \frac{n-1}{m} \\ &\approx 1 + \frac{n}{2m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \alpha\end{aligned}$$

- Die erfolgreiche Suche ist für $\alpha < 2$ somit teurer als die erfolglose Suche

Zusammenfassung

Hashverfahren mit Verkettung

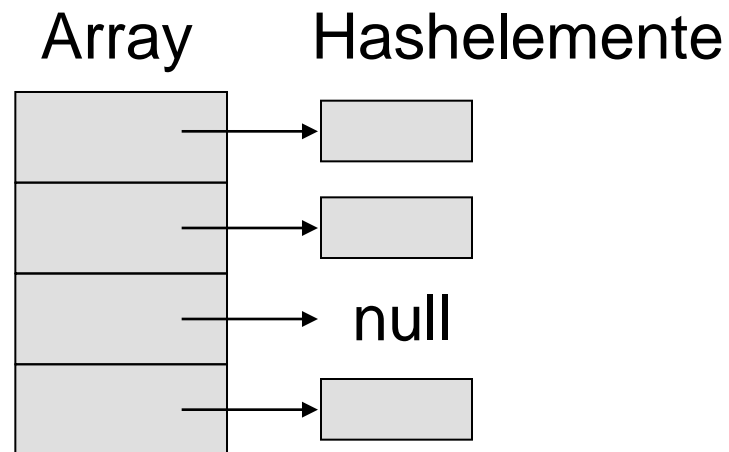
- Speichern mehrere Elemente pro Behälter
- Einfach zu realisieren
- Sie erlauben eine effiziente Realisierung einer Datenstruktur mit dem Aufwand

Verfahren	Durchschnittlicher Aufwand
Einfügen	$O(1)$
Suchen	$O(\alpha)$
Löschen	$O(\alpha)$

Einfügen hier ohne vorherige Existenzprüfung

Offene Hashverfahren

- Elemente, die nicht in ihrem eigentlichen Behälter gespeichert werden können nennt man Überläufer
- Die einzelnen Behältern speichern immer nur ein Element
- Überläufer werden in anderen Behältern gespeichert
- Es muss daher gelten $n \leq m$



Offene/Geschlossene Hashverfahren

- Unterscheidung bei der Namensgebung bzgl.
 - der Adressierung (offen/geschlossen)
 - der Anzahl der Elemente pro Behälter (geschlossen/offen)
- Variante A) [siehe Seeger, Uni Marburg]
 - Offene Hashverfahren bzgl. Behälter (m. Verkettung)
 - Geschlossene Hashverfahren bzgl. Behälter (mit Sondierung)
- **Variante B) [siehe Ottmann, Uni Freiburg]**
 - Hashverfahren mit Verkettung
 - Offene Hashverfahren bzgl. Adressierung (mit Sondierung)

Sondierung

- Zentrale Frage: In welchem Behälter werden Überläufer gespeichert?
- Für jeden Schlüssel k gibt es eine Reihenfolge, in der die Speicherplätze in der Hashtabelle auf Belegung geprüft werden
- Diese Ordnung nennt man **Sondierungsfolge**
- Im Idealfall sollten die ersten m Elemente der Sondierungsfolge eine **Permutation der Hashadressen** sein
- Es gibt mehrere verschiedene Sondierungsfunktionen, u.a. lineares, quadratisches und zufälliges Sondieren (auch Double Hashing genannt)

Sondierungsfunktion

- Neben der Hashfunktion h kommt eine Sondierungsfunktion s zum Einsatz:

$$h : D \mapsto \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

$$s : \{0, 1, \dots, m - 1\} \times D \mapsto N$$

- Aus der Sondierungsfunktion ergibt sich die Sondierungsfolge $h_1, h_2, \dots, h_i, \dots$ als

$$h_i = (h(k) - s(i, k)) \bmod m$$

Hashtabelle mit Sondierung: Insert

- Annahme: $n < m$

```
void insert(HashtabelElement ds) {  
    int addr;  
    int j=0;  
    int hash = ds.getKey().hashCode();  
    do {  
        int sond = s(j++, ds.getKey());  
        addr = (hash-sond) % this.data.length;  
    } while(this.data[addr] != NULL);  
    this.data[addr] = ds;  
}
```

Problem: Gelöschte Elemente

- **Achtung:** werden Elemente aus der Hashtabelle entfernt, kann die Sondierungsfolge eines anderen Datensatzes unterbrochen werden
- Dadurch kann eine Suche zu früh unterbrochen werden
- Damit würde die Hashtabelle **inkonsistent!**
- Lösung: Einführen eine Belegungsmarkierung
`boolean[] deleted; // identische Größe wie data`
- `deleted[i]` wird auf `true` gesetzt, wenn das Element `i`-te gelöscht wurde
- Dadurch wird die Sondierungsfolge nicht unterbrochen

Realisierung einer Hashtabelle mit Sondierung

```
class SimpleOpenHashtable {
    SimpleOpenHashtable(int size) {
        this.data = new HashtableElement[size];
        this.deleted = new boolean[size];

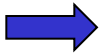
        for (int i=0; i<size; i++) {
            this.data[i] = null;
            this.deleted[i] = false;
        }
    }
    ...

    HashtableElement[] data;
    boolean[] deleted;
}
```

Hashtabelle mit Sondierung: Insert (erweitert)

- Annahme: $n < m$

```
void insert(HashtabelElement ds) {  
    int addr;  
    int j=0;  
    int hash = ds.getKey().hashCode();  
    do {  
        int sond = s(j++, ds.getKey());  
        addr = (hash-sond) % this.data.length;  
    } while(this.data[addr] != null);  
    this.data[addr] = ds;  
    this.deleted[addr] = false;  
}
```



Hashtabelle mit Sondierung: Suchen

- Annahme: $n < m$

```
HashtableElement search(Object k) {
    int addr;
    int j=0;
    int hash = k.hashCode();
    do {
        int sond = s(j++, k);
        addr = (hash-sond) % this.data.length;
    } while(this.deleted[addr] ||
            (this.data[addr] != NULL &&
             !this.data[addr].getKey().equals(k)));
    if (this.deleted[addr] || this.data[addr] == NULL)
        return null;
    else
        return this.data[addr];
}
```

Hashtabelle mit Sondierung: Löschen

- Annahme: $n < m$

```
void delete(Object k) {
    int addr;
    int j=0;
    int hash = k.hashCode();
    do {
        int sond = s(j++, k);
        addr = (hash-sond) % this.data.length;
    } while(this.deleted[addr] ||
            (this.data[addr] != null &&
             !this.data[addr].getKey().equals(k)));
    this.data[addr] = null;
    this.deleted[addr] = true;
}
```

Lineares Sondieren

- Bisher haben wir die Sondierungsfunktion als abstrakte Funktion betrachtet
- Eine mögliche Realisierung ist lineares Sondieren:

$$s(j, k) = j$$

- Daraus ergibt sich die Sondierungsfolge:

$$h(k), h(k) - 1, h(k) - 2, \dots, 0, m - 1, m - 2, h(k) + 1$$

Beispiel für Lineares Sondieren

- $h(k) = k \bmod 7$
- Einfügen von 78, 57, 80, 21:

57	78		80			21	data
f	f	f	f	f	f	f	deleted

- Einfügen von 29 ($29 \bmod 7 = 1$)

57	78		80		29	21	data
f	f	f	f	f	f	f	deleted

- Löschen von 57

	78		80		29	21	data
t	f	f	f	f	f	f	deleted

Primäre Clusterung

- Unter einem Cluster verstehen wir eine zusammenhängende Menge von belegten Behältern

Primäre Clusterung:

- Ein neuer Datensatz, dessen Hashadresse in einem Cluster liegt muss den Cluster linear bis zum Ende verfolgen
- Danach wird der Datensatz an das Ende des Clusters angefügt
- Damit wird der Cluster um ein Element vergrößert

Beispiel für Primäre Clusterung

- $h(k) = k \bmod 7$
- Einfügen von 78, 57, 80: 2 Cluster

57	78		80				data
f	f	f	f	f	f	f	deleted

- Einfügen von 29: Der größere Cluster vergrößert sich weiter

57	78		80			29	data
f	f	f	f	f	f	f	deleted

Quadratisches Sondieren

- Eine alternative Realisierung ist lineares Sondieren:

$$s(j, k) = (\text{ceil}(\frac{j}{2}))^2 (-1)^j$$

- Daraus ergibt sich die Sondierungsfolge:

$$h(k), (h(k) + 1) \% m, (h(k) - 1) \% m, (h(k) + 4) \% m, \dots$$

- Vorteile: Vermeidung von primären Clustern
- Quadratisches Sondieren ist effizienter als lineares Sondieren

Beispiel

- $h(k) = k \bmod 7$
- Einfügen von 78, 57, 80, 21:

21	78	57	80				data deleted
f	f	f	f	f	f	f	

- Einfügen von 16:

21	78	57	80			16	data deleted
f	f	f	f	f	f	f	

Sekundäre Clusterung

- Datensätze mit gleicher Hashadresse haben nach wie vor die gleicher Sondierungsfolge
- D.h. die Sondierungsfolge hängt nur vom Index j ab und nicht vom Schlüssel k
- Dies ist sub-optimal

Zufälliges Sondieren - Double Hashing

- **Ziel:** Vermeidung von primärer und sekundärer Clusterung
- Idealerweise sollten sich $m!$ Sondierungsfolgen in Abhängigkeit der Schlüssel ergeben
- Hashfunktionen selbst bieten die Möglichkeit nahezu „zufällig“ zu sondieren
- Lösung: Als Sondierungsfunktion wird eine Hashfunktion eingesetzt
- I.A. erzeugen Hashfunktionen aber keine Permutationen

Hashfunktion als Sondierungsfunktion

- s ist eine Hashfunktion (beachte: s ungleich h):

$$s(j, k) = j \cdot h'(k)$$

- Damit ergibt sich als Sondierungsfolge

$$h(k), (h(k) - h'(k)) \% m, (h(k) - 2 \cdot h'(k)) \% m, \dots$$

- Anforderungen an die Hashfunktion zum Sondieren:
 - $h'(k)$ teilerfremd zu m
 - $h'(k) \neq 0$
- Unter diesen Bedingungen ist die Sondierungsfolge eine Permutation der Hashadressen

Beispiel

- Um eine Permutation zu erhalten haben wir gefordert:
 - $h'(k)$ teilerfremd zu m und $h'(k) \neq 0$
- Seien die Schlüssel ganze Zahlen und m eine Primzahl

$$h(k) = k \bmod m$$

$$h'(k) = 1 + k \bmod (m - 2)$$

- Beispiel:

21	78	16	80		57	
f	f	f	f	f	f	f

data

deleted

Insert(29)

21	78	16	80	29	57	
f	f	f	f	f	f	f

data

deleted

- $h(29) = 1$ und $h'(29) = 5$
- Sondierungsfolge: 1, 3, 5, 0, 2, 4

Analyse

- Ist s eine Hashfunktion mit den beiden zuvor genannten Eigenschaften spricht man auch von **uniformem Sondieren**
- Man kann zeigen dass uniformes Sondieren **optimale Sondierungsfolgen** liefert
- Anzahl der Zugriffe für eine erfolglose Suche:

$$\# \text{Zugriffe} \approx \frac{1}{1 - \alpha} \quad \alpha < 1$$

- Anzahl der Zugriffe für eine erfolgreiche Suche:

$$\# \text{Zugriffe} \approx \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) \quad \alpha < 1$$

Dynamische Hashverfahren

- Probleme bei den bisher vorgestellten Techniken
- Kleiner Belegungsfaktor → Schlechte Ausnutzung
- Großer Belegungsfaktor → Hohe Suchkosten
- Keine Unterstützung stark anwachsender Tabellen
- Für (offene) Hashverfahren mit Sondierung gilt $n \leq m$

Lösungen:

- **Globale Reorganisation** (Adaption der Tabellengröße, Hashfunktion, und Umspeicherung von Elementen)
- Aus Effizienzgründen empfehlen sich **schrittweise, „kleine“ Reorganisationen**

Lineares Hashing

- **Lineares Hashing** ist ein Vertreter der **dynamischen** Hashverfahren
- Erfunden 1980 von W. Litwin zur Verwaltung großer Datenmengen auf dem Externspeicher
- Lineares Hashing kann ebenfalls als interne Datenstruktur genutzt werden (hier beschränken wir uns auf diesen Fall)
- Wir beschränken uns weiterhin auf die Realisierung bei der jeder Behälter eine Liste darstellt

Idee des Linearen Hashings

- Initialisierung identisch zu dem anfangs vorgestellten Hashverfahren mit Verkettung

$$h : D \mapsto \{0, 1, \dots, m - 1\}$$

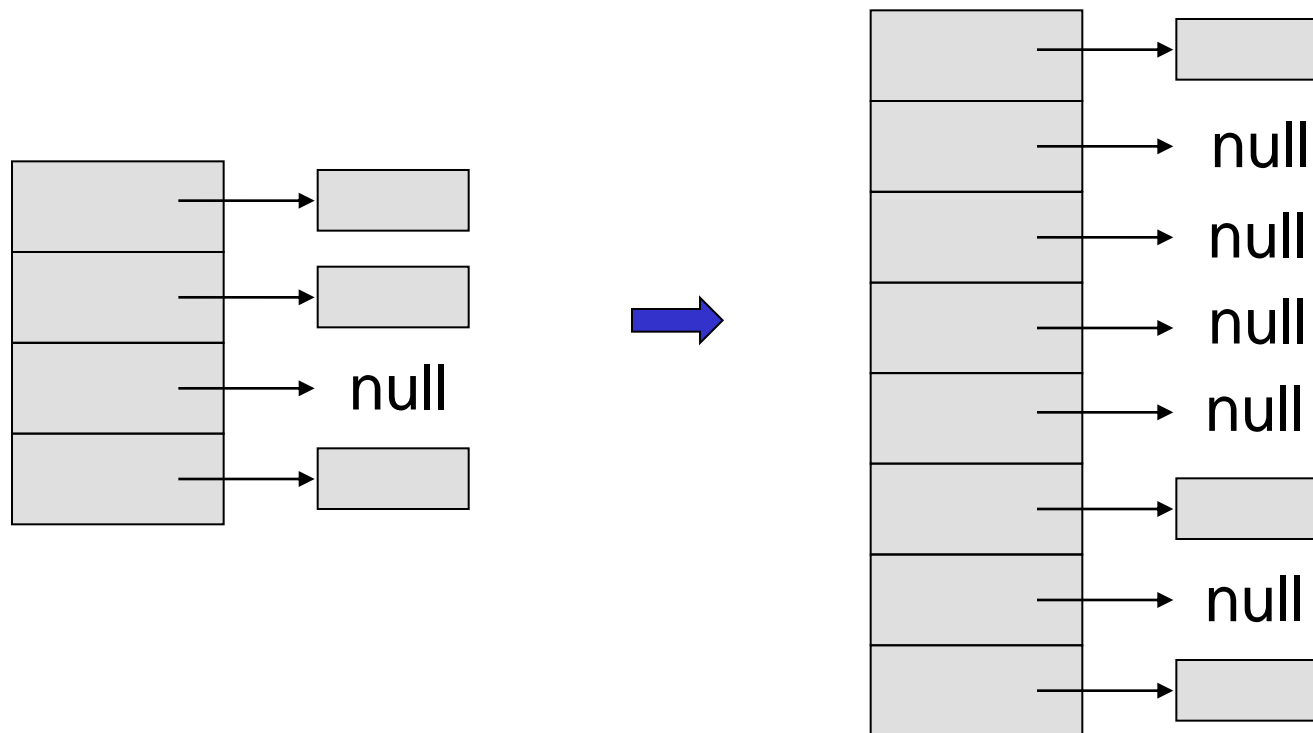
- Jeder Behälter wird durch eine Liste realisiert
- Mit steigendem Belegungsfaktor steigt die Wahrscheinlichkeit für Kollisionen und führt somit zu einem Anwachsen der Listen

Idee:

- Falls der Belegungsfaktor zu groß wird, erweitert man die Hashtabelle schrittweise

Einfache Realisierung des Linearen Hashings

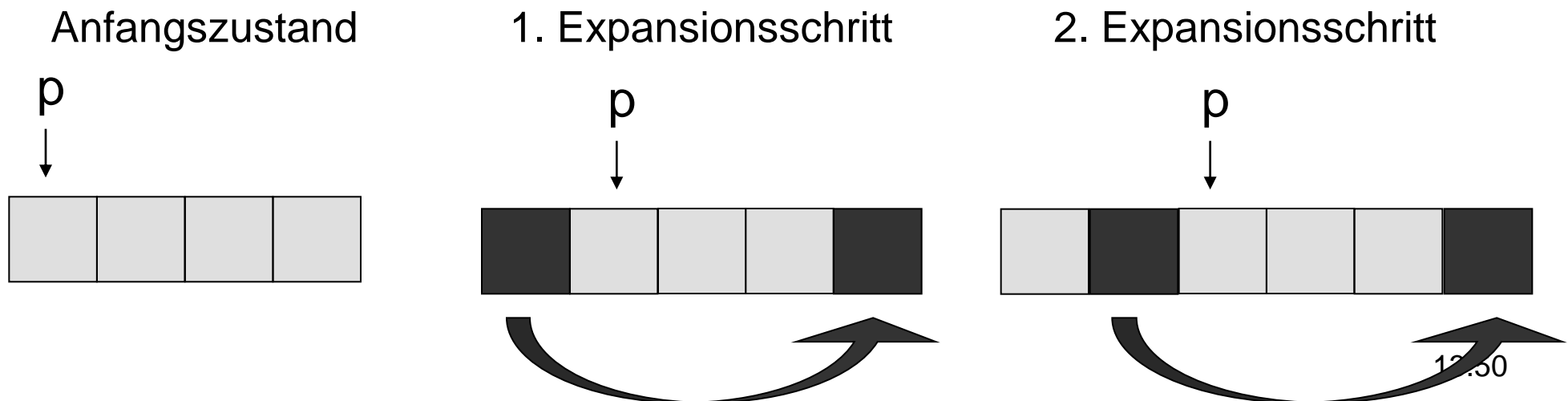
- Ist der α zu groß, erstellt man eine neue Tabelle mit der Größe $2 \cdot m$ und kopiert alle Elemente in die neue Tabelle



- Problem:** Teures rehashing aller existierender Elemente

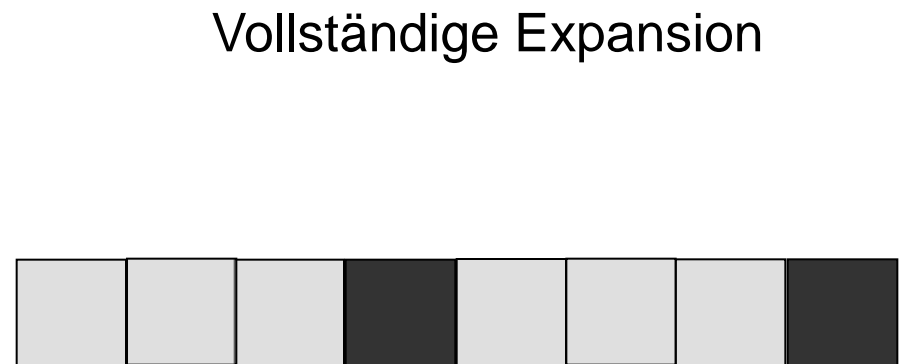
Lineares Hashing (Optimiert)

- Idee: Schrittweise Hinzunahme neuer Behälter
- In jedem Expansionsschritt wird genau ein Behälter selektiert und dessen Elemente neu verteilt
- Man fängt mit dem Behälter B_0 an und expandiert im Schritt i den Behälter B_{i-1}
- Praktisch realisiert man dies über einen Expansionszeiger p

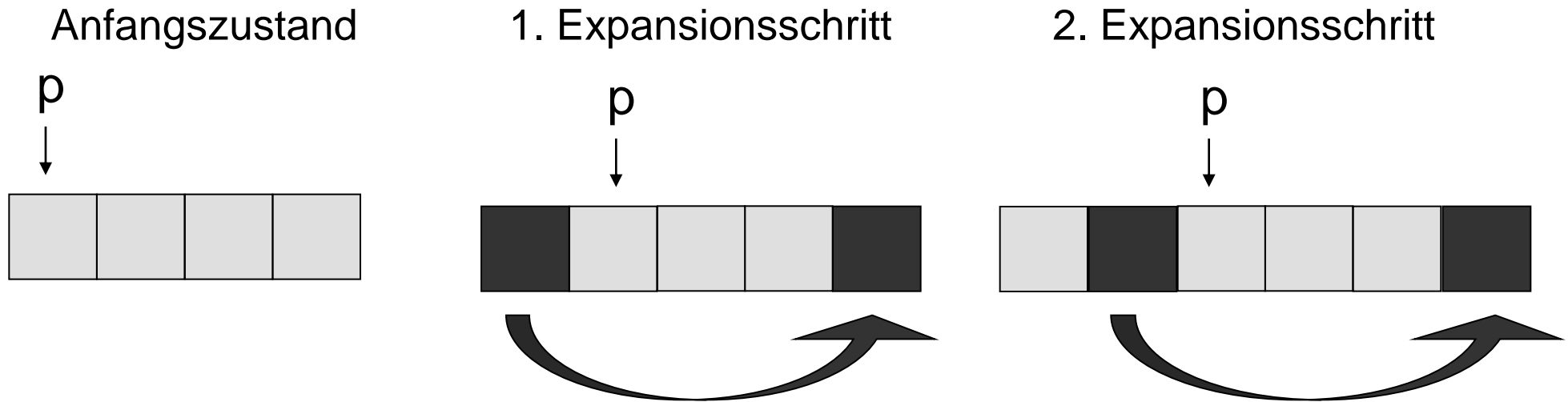


Lineares Hashing (Optimiert)

- Hat sich die Hashtabelle verdoppelt, so spricht man von einer vollständigen Expansion
- Die Anzahl der Verdopplungen bezeichnet man als Level L
- Sei die Initiale Größe der Tabelle m_0
- Die Anzahl der Hashadressen nach einer vollständigen Expansion ist somit $m_0 \cdot 2^L$



Zentrale Fragen



- Wie verteilt man die Elemente eines Behälters?
- Wie findet man nach einem Expansionsschritt die Datensätze im neuen Behälter?

Wahl der Hashfunktion(en)

- Man löst diese Probleme durch Adaption der Hashfunktion
- Dabei setzte sich die Hashfunktion h beim Linear Hashing aus bis zu zwei Hashfunktionen h_L und h_{L+1} zusammen

$$h_L : D \mapsto \{0, 1, \dots, m_0 \cdot 2^L - 1\}$$

$$h_{L+1} : D \mapsto \{0, 1, \dots, m_0 \cdot 2^{L+1} - 1\}$$

- Wir setzen die sog. Spalt-Eigenschaft voraus:

$$h_{L+1}(k) = \begin{array}{l} h_L(k) \\ \text{oder} \\ h_L(k) + m_0 \cdot 2^L \end{array}$$

Beispiel

- Eine Hashfunktion, die die soeben vorgestellten Eigenschaften besitzt ist

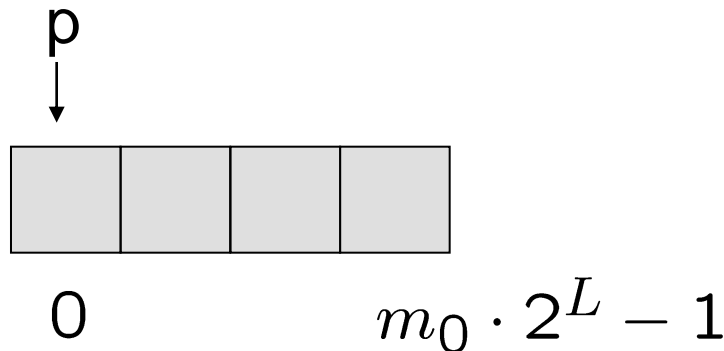
$$h_L(k) = k \bmod (m_0 \cdot 2^L)$$

Beispiel:

- $m_0 = 4$
- $L = 3$
- $k = 36$
- $h_L(k) = h_3(36) = 36 \bmod (4 \cdot 2^3) = 36 \bmod 32 = 4$
- $h_L(k) + m_0 \cdot 2^L = h_3(36) + (4 \cdot 2^3) = 4 + (4 \cdot 2^3) = 4 + 32 = 36$
- $h_{L+1}(k) = h_4(36) = 36 \bmod (4 \cdot 2^4) = 36 \bmod 64 = 36$

Der Expansionsschritt im Detail (1)

- Betrachten wir die Situation nach L vollständigen Expansionen
 - Es gibt also $m_0 \cdot 2^L$ Behälter
 - Der Expansionszeiger p zeigt auf das 0-te Element
 - Alle Element werden durch h_L korrekt abgebildet



- Ist nach einer Einfügeoperation der Belegungsfaktor größer als ein Schwellwert, wird ein Expansionsschritt ausgeführt

Der Expansionsschritt im Detail (2)

- Im Falle einer schrittweisen Expansion wird ein **neuer Behälter angehängt** und der **Behälter B_p aufgespalten**
- Für jedes Element in B_p wird h_{L+1} ausgewertet und das Element **entweder dem neuen und alten Behälter zugeteilt**
- Aufgrund der Spalt-Eigenschaft sind nur 2 Resultate möglich
 - $h_{L+1}(k) = h_L(k) = p$
 - $h_{L+1}(k) = h_L(k) + m_0 \cdot 2^L = p + m_0 \cdot 2^L$
- Die Elemente in B_p werden daher auf B_p und $B_{p+m_0 \cdot 2^L}$ aufgeteilt
- Der Zeiger p wird um 1 erhöht
- Falls $p = m_0 \cdot 2^L$, ist eine vollständige Expansion abgeschlossen, d.h. L wird um 1 erhöht und $p = 0$

Hashfunktion

- Mit dieser Technik lässt sich die endgültige Hashfunktion einfach konstruieren:

```
int LH_hash(k) {  
    int addr = h(L, k);  
    if (addr < p)  
        addr = h(L+1, k);  
    return addr;  
}
```

- $h(L, k)$ könnte z.B. wie folgt definiert sein:

$$h_L(k) = k \bmod (m_0 \cdot 2^L)$$

Expansion der Behälter-Datenstruktur

- Bisher haben wir **angenommen**, wir könnten an die Hashtabelle einfach einen neuen Behälter anhängen
- Dies ist im worst-case mit linearem Aufwand verbunden
- Man behilft sich in der Praxis mit einem „Trick“
(den beispielsweise auch die Klasse Vector nutzt)
 - Man allokiert mehr Speicher als man eigentlich benötigt
 - Ist auch dieser Speicher verbraucht, allokiert man eine neue Kollektion mit doppelt so vielen Speicherplätzen und kopiert die ursprünglichen Elemente in die neue Kollektion
- Diese Operation hat aber **linearen Aufwand**: $O(n)$
- Sie muss allerdings **nur alle n Schritte einmal** ausgeführt werden
- Daher spricht man von **amortisiert konstantem Aufwand**

Automatische Array Expansion

```
Class DynamicArray {  
    ...  
    void checkAllocation() {  
        if (this.numElements != this.allocated) return;  
        Object[] newdata = new Object[2*this.allocated];  
        for (int i=0; i<this.allocated; i++)  
            this.newdata[i] = this.data[i];  
        this.data = this.newdata;  
        this.allocated = this.allocated * 2;  
    }  
  
    Object[] data; // Speicherplatz für die Elemente  
    int numElements; // Anzahl der gespeicherten Elemente  
    int allocated; // Anzahl der reservierten Speicherplätze  
}
```

Lineares Hashing (1)

- Lineares Hashing stellt eine **effiziente Methode** da, die Größe einer Hashtabelle **dynamisch anzupassen**
- Man muss sich nicht im vorhinein festlegen, wie viele Elemente man einfügen möchte
- Ähnlich wie die Erweiterung einer Hashtabelle kann diese auch verkleinert werden, wenn der Belegungsfaktor zu klein wird
- Das Zusammenlegen von zwei Behältern kann in konstanter Zeit erledigt werden
- Die Reduktion einer Hashtabelle funktioniert äquivalent zur Expansion

Lineares Hashing (2)

- Effizientes Suchen, Löschen, und Einfügen

Verfahren	Durchschnittlicher Aufwand
Einfügen	$O(1)$
Suchen	$O(1)$
Löschen	$O(1)$

- Lineares Hashing ist i.A. den anderen in der Vorlesung vorgestellten Verfahren vorzuziehen

Zusammenfassung

- Hashtabellen stellen eine Technik dar, um grundlegende **Mengenoperationen** wie Einfügen, Suchen und Löschen in **durchschnittlich konstanter Zeit** zu realisieren
- Objekte werden mittels einer **Hashfunktion adressiert**
- Jedes Objekt muss sich mittels eines **Schlüssels** (key) unterscheiden lassen
- Wird mehreren Objekten die gleiche Hashadresse zugewiesen, kommt es zu **Kollisionen**
- Hashverfahren unterscheiden sich hauptsächlich dadurch, wie sie mit Kollisionen umgehen und ob sie ihre Größe dynamisch anpassen können
- Wir haben Hashing **mit Verkettung, mit Sondierung (offenes Hashing), und lineares Hashing** betrachtet